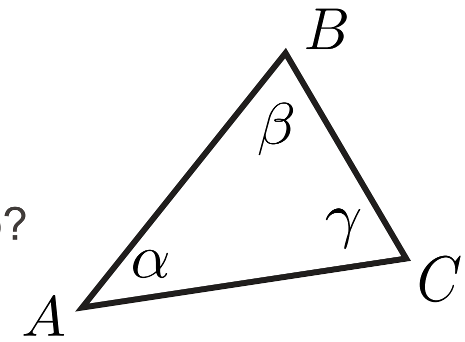
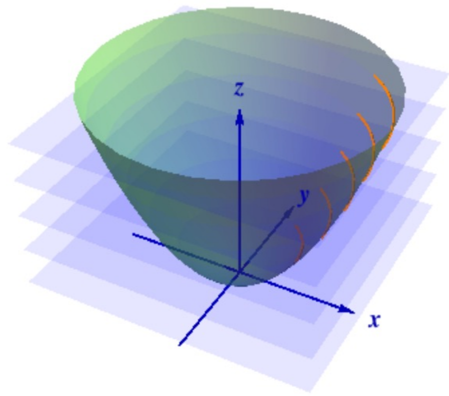
ME 6-1 : Compensation conditionnelle



- Retour du triangle
  - Surdétermination: compenser les 3 angles d'un seul coup?
  - Modèle fonctionnel:
    - Valeurs idéales ($\check{\ell}$), réelles (ℓ + écart de fermeture **w**)
    - Pour obtenir ($\hat{\ell}$): on intrudit les résidus (**v**) + le critère des moindres carrés
  - Modèle stochastique: fait partie du critère!



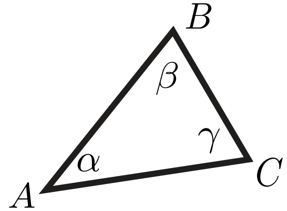
- Résolution
  - Forme quadratique - extremum lié - Lagrange
  - Dérivation matricielle (taille des matrices!)
  - Réduction du système d'équations

- Résultats
  - Résidus compensés
  - Observations compensées

EPFL

Exemple de triangle (semaine 5)
avec des angles de précision égale compensation via moyenne pondérée

$$\ell_\alpha = 61.341\,\text{gon}$$
$$\ell_\beta = 99.658\,\text{gon}$$
$$\ell_\gamma = 38.986\,\text{gon}$$



$$200 - \sum \ell_i = 0.015 \text{ gon}$$
$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_0 \approx 3 \text{ mgon}$$

- la procédure pour alpha, beta et gamma:

$$\hat{\alpha} = \frac{p_{\alpha_D}\alpha_D + p_{\alpha_I}(200-\beta-\gamma)}{p_{\alpha_D}+p_{\alpha_I}} = 61.346 \text{ gon}$$
$$\hat{\beta} = \frac{p_{\beta_D}\beta_D + p_{\beta_I}(200-\alpha-\gamma)}{p_{\beta_D}+p_{\beta_I}} = 99.663 \text{ gon}$$
$$\hat{\gamma} = \frac{p_{\gamma_D}\gamma_D + p_{\gamma_I}(200-\alpha-\beta)}{p_{\gamma_D}+p_{\gamma_I}} = 38.991 \text{ gon}$$

$$p_D = \frac{1}{\sigma_0^2}\cdot\sigma_0^2 = 1$$
$$p_I = \frac{1}{2\cdot\sigma_0^2}\cdot\sigma_0^2 = 0.5$$

- on calcule les résidus

$$v_\alpha = \ell_\alpha - \hat{\alpha} = 0.005 \text{ gon}$$
$$v_\beta = \ell_\beta - \hat{\beta} = 0.005 \text{ gon}$$
$$v_\gamma = \ell_\gamma - \hat{\gamma} = 0.005 \text{ gon}$$

- on observe que
  - la répartition des résidus est uniforme

$$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = 0.005 \text{ gon}$$

  - écarte de fermeture = la somme des résidus

$$\sum v_i = 0.015 \text{ gon} = \left|\sum \ell_i - 200\right|$$

Compensation conditionnelle

1. Formulation du problème
   - On mesure souvent des quantités pour lesquelles des relations mathématiques précises s'appliquent. Par exemple, les valeurs réelles des angles dans un triangle satisfont toujours à la condition de fermeture.
   - Si nous mesurons ces quantités en surplus (p.ex. un troisième angle ou un côté supplémentaire dans un triangle, ...), les valeurs mesurées ne satisfont pas exactement à la condition donnée en raison des erreurs de mesure.
   - Pour éliminer les divergences constatées, nous devons les corriger. Une condition préalable à compensation est la mesure d'au moins une quantité redondante.

Compensation conditionnelle

2. Formulation mathématique
   - On a les mesures $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ avec des poids $\overbrace{(p_1, \ldots, p_n)}^{\mathbf{P} \text{ en générale!}}$. Les valeurs vraies des quantités mesurées satisfont exactement r relations (r est le nombre de mesures *redondantes*), appelées *conditions*:

$$\begin{aligned} f_1(\check{\ell}_1, \check{\ell}_2, \ldots, \check{\ell}_n) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ f_r(\check{\ell}_1, \check{\ell}_2, \ldots, \check{\ell}_n) &= 0 \end{aligned}$$

   - Les valeurs compensées doivent remplir les mêmes conditions!

$$f_k(\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2, \ldots, \hat{\ell}_n) = 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - Les quantités mesurées ne respectent pas ces ces relations en raison d'erreurs de mesure.

$$f_k(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) = w_k \neq 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - Les déviations calculées w sont appelées *les écartes de fermeture*.

   - L'objectif est est d'ajoutant des corrections v aux valeurs mesurées que les écartes de fermetures =0 tout en minimisant la somme quadratique de v.

Compensation conditionnelle

3. Formulation mathématique – synthèse

- Mesures: $(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ leurs poids $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}^{-1}$

- Conditions: $f_k(\ell_1 - v_1, \ell_2 - v_2, \ldots, \ell_n - v_n) = 0 \qquad k = 1, \cdots, r$

- Ecartes de fermeture: $f_k(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) = w_k \quad k = 1, \cdots, r$

- Les conditions linéaires (linéarisés): $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}$
  (dérivation en Chap. 3.2) $\mathbf{B} = \frac{\partial f(\ell)}{\partial \ell}$

Compensation conditionnelle

4. Dérivation de la méthode de calcul (Chap. 3.3)
   - Usage des coefficients de Lagrange ($-2k$) pour multiplier des conditions tout en ajoutant des éléments quadratiques:

$$\Omega = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \underbrace{-2 \cdot \mathbf{k}^T}_{\Lambda} (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{w}) \longrightarrow \text{minimum}$$

dans la notation de Lagrange

   - Dériver et mettre à zéro pour déterminer le minimum:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = 2 \cdot \mathbf{P}\mathbf{v} - 2 \cdot \mathbf{B}\mathbf{k} = 0$$

   - On y extraire

$$\mathbf{k} = \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}$$

   - On obtienne la formule pour les résidus compensés:

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}$$

Compensation conditionnelle

5. Dérivation de la méthode de calcul (Chap. 3.3)
   - A partir des résidus compensés on peut calculer les observations compensées:

$$\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$$

   - On contrôle le calcul et la linéarisation en introduisant des observations compensées dans les conditions d'origine (éventuellement non linéaires)

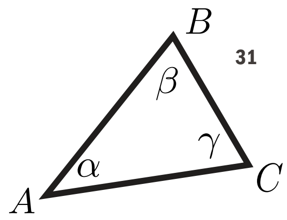
$$f_k(\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2, \ldots, \hat{\ell}_n) = 0 \quad k = 1, \cdots, r$$

   - ces derniers doivent être égaux à zéro (jusqu'à la précision numérique).

EPFL

Exemple de triangle en compensation conditionnelle

$$\ell_\alpha = 61.341\ \text{gon}$$
$$\ell_\beta = 99.658\ \text{gon}$$
$$\ell_\gamma = 38.986\ \text{gon}$$



- Synthèse de tableau noir

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_0 \approx 3\ \text{mgon}$$

  - Condition

$$(\ell_\alpha - v_a) + (\ell_\beta - v_b) + (\ell_\gamma - v_g) - 200 = 0$$

  - Ecart de fermeture

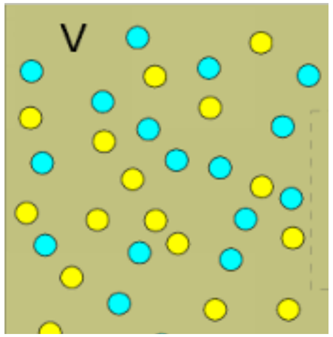
$$\underbrace{(\ell_\alpha + \ell_\beta + \ell_\gamma - 200}_{\mathbf{w}} - (v_a + v_b + v_g) = 0 \longrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \mathbf{w} = 15\ \text{mgon}$$

  - Résidus compensés: $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T \left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T\right)^{-1} \cdot \mathbf{w}$

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{I}_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{I}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3} \right)^{-1} \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w/3 \\ w/3 \\ w/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \text{mgon}$$

  - Observations compensées et le contrôle: $\hat{\ell} = \ell - \hat{\mathbf{v}}$ $\qquad \sum \hat{\ell}_i - 200 = 0$

ME 6-2 : Gaz parfait - avec élégance!



- Données de l'exercise précédent
  - 5 états → 4 mesures indirectes du volume V_1
  - Détection d'une faute, moyennes pondérées, comparisons

- Compensation conditionelles avec 2 états → $r = 1$
  - Partir de rien (ou réaliser la 1ère étape avec le Python de base)
  - Comprendre la démarche et les résultats

- Ajouter des conditions, 5 états → $r = 4$
  - Adapter le code pour *r* quelconque (= mécaniser la construction de $\mathbf{w}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}_{\ell\ell}$)
  - Choix des conditions + détection d'une faute (éliminer ou réparer?)
  - 2em étape: écarts-types et corrélations des résidus + observ. compensées, quotient global (quotient d'erreur moyenne)
  - 3em étape: modifier les écarts-types *a priori* et recalculer …

ME 6-3 : Quelques outils

- Principe des moindres carrés
  - Définition: $\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \longrightarrow$ minimum
  - Exemple: la moyenne arithmétique, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$
    - Présentation empirique
    - Démonstration analytique

- Exercices en autocontrôle sur Moodle
  - Dérivation matricielle
    - Développer l’expression en scalaires
    - Dériver
    - Former des vecteurs et des matrices
  - Moyenne pondérée, $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$
  - Extension de la moyenne arithmétique